Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

GW 9.1 – Quadratwurzeln

Die Quadratwurzel aus a ($\sqrt{a}$) ist diejenige nicht negative Zahl ($a \geq 0$), die quadriert a ergibt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Die Zahl (der Term) unter der Wurzel, hier a, heißt **Radikand**. → $\sqrt{a}$

Quadratwurzeln sind nur für nichtnegative Zahlen definiert: $a \geq 0$
d.h. es gibt keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen.

Für beliebige reelle Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$ (*Betrag!*)

Beispiele:

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{169x^2} = 13|x|$

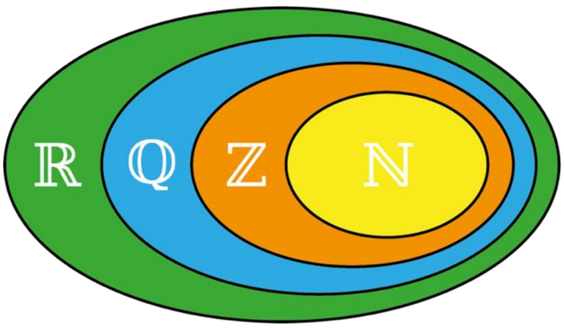
$\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\sqrt{-3} =$

GW 9.2 – Reelle Zahlen

Jeder unendliche, nicht periodische Dezimalbruch stellt eine **irrationale Zahl** dar,
z.B. $\sqrt{2}$ $-\sqrt{11}$ π 0,12345…

Kombiniert man nun die rationalen Zahlen mit den irrationalen Zahlen erhält man die **Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.



Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$ = Menge aller Brüche mit jeweils ganzzähligem Zähler und Nenner

Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$ = Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen

Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

Inhalt	GW
Summe: Es dürfen **nicht** die einzelnen Summanden radiziert werden. $$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$ **Produkt:** Faktoren dürfen einzeln radiziert werden. $$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$ **Quotient:** Dividend und Divisor dürfen einzeln radiziert werden. $$\sqrt{a}:\sqrt{b}=\sqrt{a:b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$$ $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$ *Anwendungen:* **Teilweises Radizieren:** $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ **Unter die Wurzel ziehen:** $4\sqrt{2}=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{32}$ **Summe von Wurzeln (mit gleichem Radikanden):** $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{5}=(2+7)\cdot\sqrt{5}=9\sqrt{5}$	**GW 9.3** **Rechnen mit Quadratwurzeln**
Binomische Formeln: 1. bin. Formel *(Plusformel):* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2. bin. Formel *(Minusformel):* $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 3. bin. Formel *(Plusminusformel):* $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ **Wurzelziehen mit binomischen Formeln:** Dabei werden die Radikanden mithilfe der 1. oder 2. Binomischen Formel faktorisiert. z.B. $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=\lvert a-b\rvert$ **Nenner rational machen:** 1. Fall: Term mit der Wurzel des Nenners erweitern. z.B. $\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{1}=4\sqrt{2}$ 2. Fall: 3. Binomische Formel verwenden, wenn der Nenner eine Summe oder Differenz mit Wurzeln ist („wenn die andere Hälfte fehlt“). z.B. $\frac{\sqrt{7}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}\cdot(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{7}\cdot(1+\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{7}\cdot(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{\sqrt{7}\cdot(1+\sqrt{3})}{-2}$	**GW 9.4** **Termumformungen bei Wurzeltermen**

Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ Der Exponent **n** gibt den **Grad der Potenzfunktion** an. Ist der Exponent n **gerade,** so gilt: - Die Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse. - Ist $a > 0$: „von links oben nach rechts oben“ Graph fällt monoton für $x < 0$ Graph steigt monoton für $x > 0$ Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$ - Ist $a < 0$: „von links unten nach rechts unten“ Graph steigt monoton für $x < 0$ Graph fällt monoton für $x > 0$ Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^-$	**GW 9.5 – Teil 1** **Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten**
Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ Der Exponent **n** gibt den **Grad der Potenzfunktion** an. Ist der Exponent n **ungerade,** so gilt: - Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung. - Ist $a > 0$: „von links unten nach rechts oben“ Graph steigt monoton Wertemenge $W = \mathbb{R}$ - Ist $a < 0$: „von links oben nach rechts unten“ Graph fällt monoton Wertemenge $W = \mathbb{R}$	**GW 9.5 – Teil 2** **Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten**

Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

GW 9.6

n-te Wurzel

Die n-te Wurzel aus der **nicht-negativen Zahl $\boldsymbol{a}$** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Die Zahl n heißt Wurzelexponent: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Dabei ist zu beachten das n-te Wurzel **nur** für nicht-negative Zahlen definiert sind: $a > 0$

	n gerade	n ungerade
$a > 0$	$L = \{-\sqrt[n]{a}\,;\ \sqrt[n]{a}\}$	$L = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$a < 0$	$L = \{\ \}$	$L = \{-\sqrt[n]{a}\}$

z.B. $x^6 = 7 \Longrightarrow L = \{-\sqrt[6]{7}\,;\ \sqrt[6]{7}\}$

$x^3 = -2 \Longrightarrow L = \{-\sqrt[3]{2}\}$

GW 9.7

Potenzen mit rationalen Exponenten

Es gilt: $a > 0$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Rechenregeln:

Multiplizieren bei gleicher Basis:

Exponenten addieren

$$5^{\frac{6}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{4}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = 5^2 = 25$$

Dividieren bei gleicher Basis:

Exponenten subtrahieren

$$5^{\frac{6}{4}} : 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{4}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{4}-\frac{2}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$$

Multiplizieren bei gleichem Exponenten:

$$4^{\frac{1}{7}} \cdot 9^{\frac{1}{7}} = (4 \cdot 9)^{\frac{1}{7}} = 36^{\frac{1}{7}}$$

Dividieren bei gleichem Exponenten:

$$4^{\frac{1}{7}} : 8^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{4}{8}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Potenzieren von Potenzen:

Exponenten multiplizieren

$$\left(8^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

Summen und Differenzen:

Zusammenfassen **nur** bei gleichartigen Termen möglich!

$$9b^{\frac{1}{5}} + 6b^{\frac{1}{5}} = 15b^{\frac{1}{5}}$$

Grundwissen 9. Klasse

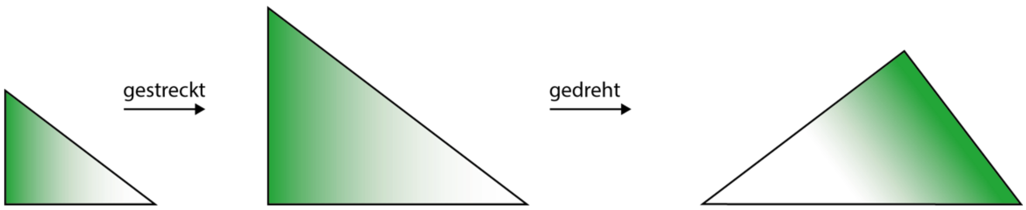
Stand: 2024

GW 9.8

Ähnliche Figuren

Ähnliche Figuren sehen bis auf ihre Größe gleich aus.

Dabei sind ihre Streckenverhältnisse sowie ihre Winkel identisch.



Für die Ähnlichkeit bei Dreiecken **genügt eines** der folgenden Merkmale:

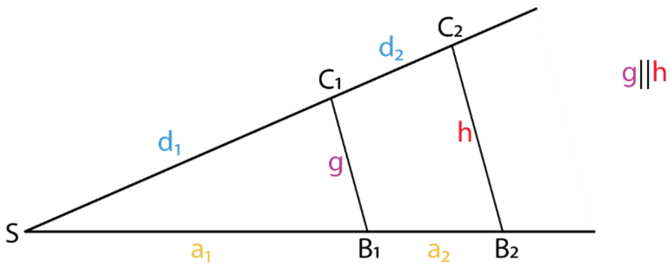
- Sie stimmen in zwei Winkeln überein (WW-Satz)
- Das Verhältnis ihrer Seitenlängen stimmen überein (S:S:S-Satz)

GW 9.8

Strahlensatz der V-Figur bzw. X-Figur

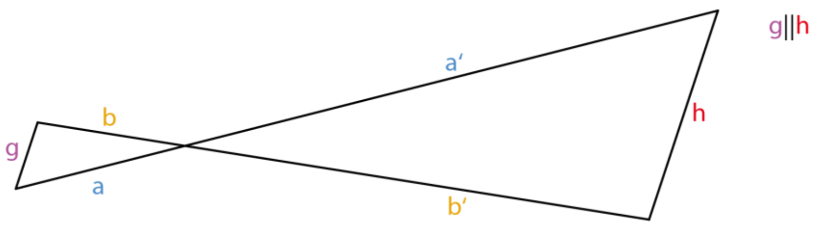
Strahlensatz bei der V-Figur:

1. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{d_2}{d_1}$ und $\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{d_2 - d_1}{d_1}$
2. $\frac{h}{g} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{d_2}{d_1}$



Strahlensatz bei der X-Figur:

$$\frac{h}{g} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$



Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

Allgemeine quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $(\ a \neq 0\ )$ Lösungsformel: $\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ Durch die **Diskriminante** $\boldsymbol{D} = b^2 - 4ac$ kann die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung (s.o.) abgelesen werden. $D > 0 \Leftrightarrow zwei\ Lösungen$ $D = 0 \Leftrightarrow genau\ eine\ Lösungen$ $D < 0 \Leftrightarrow keine\ Lösung$ **Quadratische Funktion:** <u>Allg. Form / Normalform:</u> $\quad y = ax^2 + bx + c$ Die dazugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei c (y-Achsenabschnitt). <u>Nullstellenform:</u> $\quad y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ x_1 und x_2 sind die beiden Nullstellen der Funktion, also die Punkte, wo der Graph die x-Achse schneidet. <u>Scheitelpunktform:</u> $\quad y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ Die dazugehörige Parabel hat den Scheitelpunkt S $(x_s \vert y_s)$, welcher den höchsten bzw. tiefsten Punkt des Graphen beschreibt.	**GW 9.9 – Teil 1** **Quadratische Funktionen**
Scheitelpunktform: Mithilfe der ***quadratischen Ergänzung*** lässt sich jede quadratische Gleichung in die **Scheitelpunktform** $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ bringen. <u>*Anwendungsbeispiel:*</u> $f(x) = 0{,}25x^2 + 2x - 5$ $= 0{,}25 \cdot (x^2 + 8x - 20)$ $= 0{,}25 \cdot [x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 - 20]$ $= 0{,}25 \cdot [(x+4)^2 - 4^2 - 20]$ $= 0{,}25 \cdot [(x+4)^2 - 36]$ $= 0{,}25(x+4)^2 - 9$ $\Rightarrow S(-4 \mid -9)$ ← Vorzeichen beachten! **Hinweis:** Für $a > 1$ wird die Parabel **enger** als die Normalparabel Für $a < 1$ wird die Parabel **weiter** als die Normalparabel Der Scheitelpunkt $\Rightarrow S(\ d \mid e\ )$ wird ausgehend vom Ursprung um d in x-Richtung und um e in y-Richtung verschoben.	**GW 9.9 – Teil 2** **Quadratische Funktionen**

Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

GW 9.9 – Teil 3

Quadratische Funktionen

Weiteres zum Wechsel zwischen den verschiedenen Formen:

Normalform $\Longrightarrow$ Nullstellenform:

Funktionsterm gleich null setzen → $ax^2 + bx + c = 0$

Anschließend mithilfe der z.B. Mitternachtsformel die Nullstellen bestimmen.

Den Vorfaktor a nicht vergessen → $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Nullstellenform $\Longrightarrow$ Normalform:

ausmultiplizieren und zusammenfassen

Normalform $\Longrightarrow$ Scheitelpunktform:

Mithilfe der quadratischen Ergänzung erweitern und zusammenfassen.

Siehe dazu die Extra-Lernkarte.

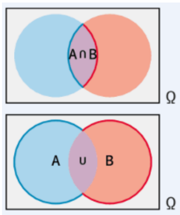
Scheitelpunktform $\Longrightarrow$ Normalform:

ausmultiplizieren und zusammenfassen

GW 9.10

Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

In **Mengendiagrammen** lassen sich Schnittmengen und Vereinigungsmengen gut darstellen.



Vierfeldertafeln bieten einen guten Überblick über absolute Häufigkeiten der Ereignisse sowie deren Verknüpfungen.

	B	$\bar{B}$	
A	500	250	750
$\bar{A}$	100	150	250
	600	400	1000

Auch Wahrscheinlichkeiten / relative Häufigkeiten können in Vierfeldertafeln dargestellt sein.

	B	$\bar{B}$	
A	0,5	0,25	0,75
$\bar{A}$	0,1	0,15	0,25
	0,6	0,4	1

Die Vereinigungsmenge $P(A \cup B)$ meint die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A oder das Ereignis B oder beide Ereignisse zusammen auftreten.

Man kann mittels der Vierfeldertafel (vgl. oben) oder folgendermaßen rechnen:

$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

GW 9.11 – Satz des Pythagoras

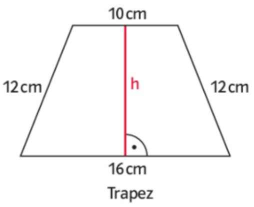
Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.

Kurz: $a^2 + b^2 = c^2$ (a,b Katheten; c Hypotenuse)

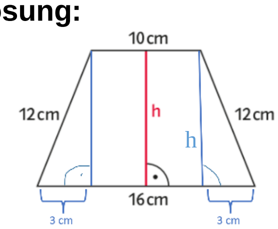
Kehrsatz des Pythagoras: Wenn in einem Dreieck die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate an den kürzeren Seiten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates an der längeren Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Skizzen und Hilfslinien helfen bei der Bestimmung gewisser Streckenlängen in Figuren und Körpern.

Gesucht: h



Lösung:



Pythagoras: $(3cm)^2 + h^2 = (12cm)^2$

$h^2 = 135\ cm^2 \quad \rightarrow \quad h \approx 11{,}62\ cm$

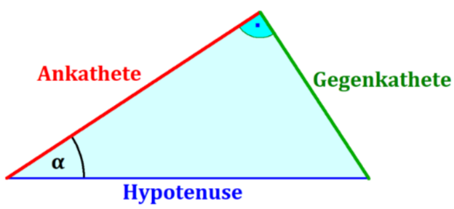
GW 9.12 – Teil I – Trigonometrie

Im **rechtwinkligen** Dreieck gilt:

$$\mathbf{sin}\ \propto = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\mathbf{cos}\ \propto = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\mathbf{tan}\ \propto = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \propto}$$



Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt:

$sin \propto = \cos(90° - \propto)$

$(sin \propto)^2 + (cos \propto)^2 = 1$

$tan \propto = \frac{sin\propto}{cos\propto}$ für $\propto \neq 90°$

Beispiel: $(tan \propto \cdot cos\alpha)^2 + \sin^2(90° - \alpha) = (\frac{sin\propto}{cos\propto} \cdot cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha =$

$(sin \propto)^2 + (cos \propto)^2 = 1$

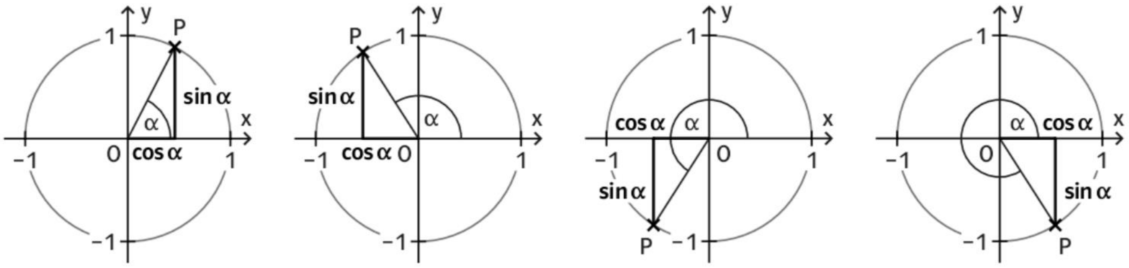
Grundwissen 9. Klasse

Stand: 2024

GW 9.12 – Teil II

Trigonometrie

Sinus und Kosinus am **Einheitskreis**



Der Taschenrechner liefert zu jedem Winkel α einen Näherungswert mit entsprechendem Vorzeichen. Will man zu einem gegebenen Sinus- bzw. Kosinuswert die Größe des Winkels bestimmen, so ist zu beachten, dass i.d.R. **zwei Winkelgrößen** angegeben werden müssen. Der Taschenrechner liefert aber nur einen Wert.

Beispiel: Gesucht sind alle $\propto$ mit $0° \leq \propto \leq 360°$, für die gilt: $cos \propto = \frac{1}{2}$

TR liefert mit „SHIFT“, „Cos“, „$\frac{1}{2}$“ → $\propto = 60°$

Es gilt aber auch $cos 300° = \frac{1}{2}$ (das erkennt man an Bild 1 und 4 oben. Sowohl im ersten als auch im vierten Quadranten nimmt $cos \propto$ positive Werte an.)

Wichtige Werte (auswendig!):

$\boldsymbol{\alpha}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\mathbf{sin} \propto$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\mathbf{cos} \propto$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{tan} \propto$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nicht definiert

GW 9.12 – Teil III

Trignometrie

Sinussatz: In jedem Dreieck ABC verhalten sich die Längen zweier Seiten wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

$\frac{a}{b} = \frac{sin\propto}{sin\beta}$ $\qquad$ $\frac{a}{c} = \frac{sin\propto}{sin\gamma}$ $\qquad$ $\frac{b}{c} = \frac{sin\beta}{sin\gamma}$

Kosinussatz: In jedem Dreieck ABC gilt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$ (für $\gamma = 90°$ → Pythagoras)