Karte 8.1 Funktionen (I)

Fachbegriffe

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen kann durch eine Zuordnung beschrieben werden: Gibt es dabei zu **jedem** zulässigen Wert der ersten Größe **genau einen** Wert der ihr zugeordneten zweiten Größe, so nennt man die Zuordnung eine **Funktion** f.

Funktionen können z. B. durch **Terme**, durch **Tabellen** oder durch **Schaubilder (Graphen)** beschrieben werden.

Häufig wird die erste Größe, die **unabhängige Variable**, mit **x** bezeichnet. Die zweite Größe, die von x **abhängige Variable**, bezeichnet man als Funktionswert von x, y.

Die Menge aller Werte von x heißt **Definitionsmenge D_f**,
die Menge aller **Funktionswerte y** heißt **Wertemenge W_f**.

Werte von x, für die der Funktionswert 0 ist, heißen **Nullstellen** der Funktion.

Beispiel: **Zuordnungsvorschrift:**
Jeder rationalen Zahl wird der um 4 verminderte Wert ihres Quadrats zugeordnet.

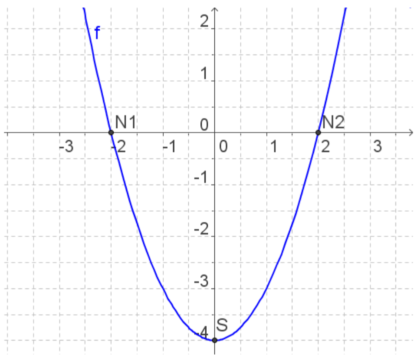
Funktion f: f (x) = $x^2 - 4$

Funktionsgleichung Funktionsterm

x	0	$\pm 0{,}5$	± 1	± 2
y = f(x)	-4	-3,75	-3	0

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 2$,
da $f(\pm 2) = 0$ ist.



Funktionsgraph

Karte 8.2 Funktionen (II)

Lineare Funktionen

f: f(x) = mx + t m, t $\in \mathbb{Q}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}$

Der Graph G_f einer linearen Funktion ist eine Gerade g, **die die y-Achse im Punkt T(0 | t)** schneidet.

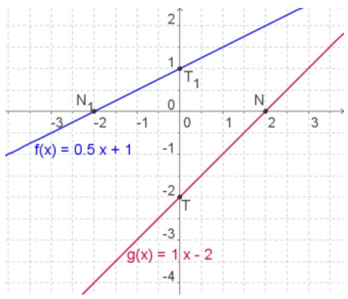
Man nennt t den **y-Achsenabschnitt** der Geraden g;
m ist die **Steigung** der Geraden g.

Für die **Nullstelle** x_N von f gilt $f(x_N) = 0$.

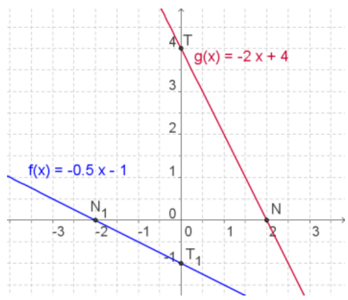
Man spricht auch von der Gleichung der Geraden g und schreibt g: y = mx + t.

Verläuft die Gerade durch die Punkte
P (x_p I y_p) und Q (x_Q I y_Q), $x_Q \neq x_p$,
so gilt für die Geradensteigung

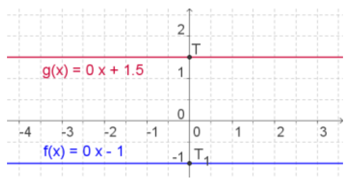
$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$



Steigende Geraden m > 0



Fallende Geraden m < 0



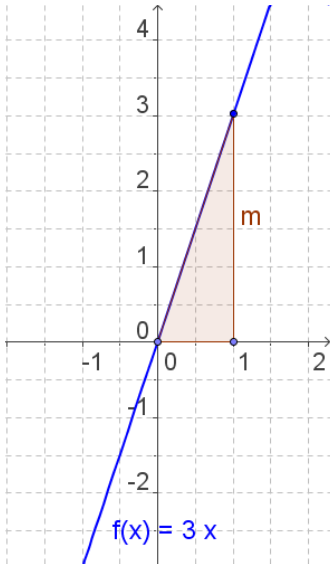
Zur x-Achse parallele Geraden m = 0

Karte 8.3
Funktionen (III)

Funktionen der direkten Proportionalität

Zwei Größen x und y sind **direkt proportional** zueinander, wenn

- Die Wertepaare quotientengleich sind: $\frac{y}{x} = m$
- Die Punkte $(x; y)$ auf einer Ursprungsgeraden liegen: $y = mx$ mit der Steigung m
- Dem Doppelten, dem dreifachen, dem Vierfachen, … dem k-fachen der einen Größe x, das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache, … das k-fache der zweiten Größe y zugeordnet wird.



Das rechtwinklige Dreieck mit waagrechter Kathete der Länge 1 LE (bzw. n) und senkrechter Kathete der Länge m LE (bzw. nm) heißt **Steigungsdreieck.**

Beispiel:

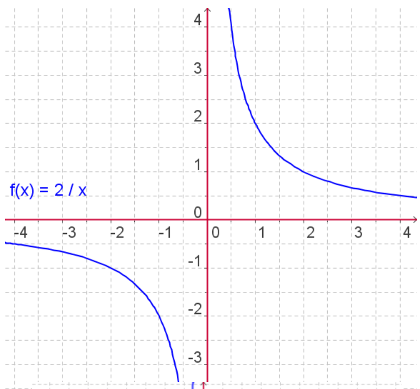
Zahl der Packungen Gummibärchen	1	2	7
Preis	1,50€	3,00€	10,50€
m= Preis pro Packung	1,50€:1=1,50€	3,00€:2=1,50€	10,50€:7=1,50€

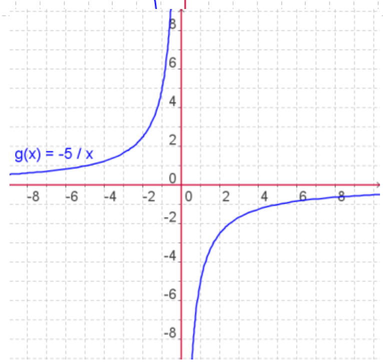
Karte 8.4
Funktionen (IV)

Funktionen der indirekten Proportionalität

Zwei Größen x und y heißen zueinander **indirekt proportional,** wenn gilt:

- Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht ... , halbiert, drittelt ... man den Wert der einen Größe x, so halbiert, drittelt, viertelt ... , verdoppelt, verdreifacht ... sich der Wert der anderen Größe y.
- Dem k-Fachen von x entspricht der k-te Teil von y und umgekehrt (k ∈ ℚ \ {0}).
- Die Wertepaare $(x; y)$ sind produktgleich: $xy = a \; mit \; a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
- Die Funktionsgleichung hat die Form $y = \frac{a}{x}$.





Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Hyperbel.**

Die x-Achse ist eine **waagrechte Asymptote,** die y-Achse eine **senkrechte Asymptote** des Funktionsgraphen.

Beispiel:
Ein Rechteck hat den Flächeninhalt $A = 12$.

Breite x	1	2	3	5
Länge y	12	6	4	2,4
A=xy	$1 \cdot 12 = 12$	$2 \cdot 6 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$	$5 \cdot 2{,}4 = 12$

Karte 8.5
Funktionen (V)

Gebrochen-rationale Funktionen

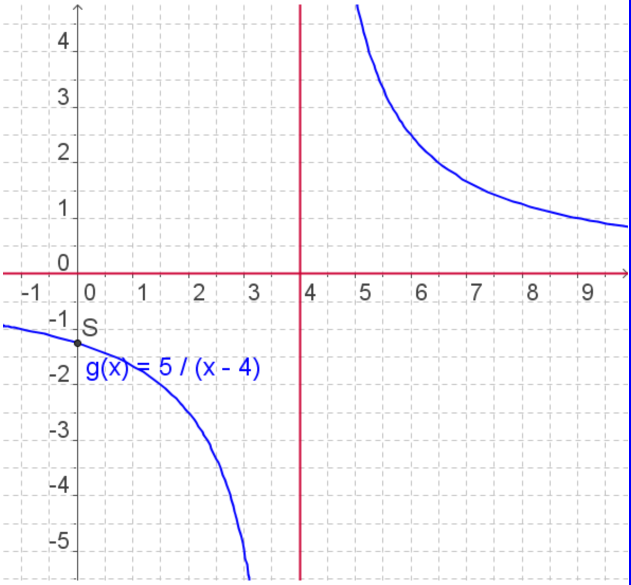
Ist der Funktionsterm ein Bruchterm, bei dem die Variable mindestens im Nenner vorkommt, so spricht man von einer **gebrochenrationalen Funktion**.

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Variablen, für die der Nenner nicht gleich null wird.

Definitionslücken: Nullstellen des Nennerterms

Beispiel:

$g(x) = \frac{5}{x-4}$ $\mathbb{D}_g = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$



Die Funktion g hat die Definitionslücke 4.

g hat keine Nullstelle.

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -1,25).

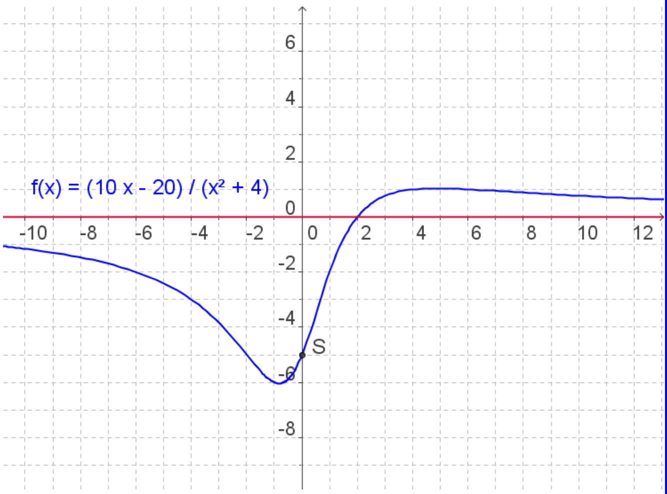
Waagrechte Asymptote: y = 0
Senkrechte Asymptote: x = 4

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	-1	-1,25	-1,67	-2,5	-5	-	5	2,5

Komplizierteres Beispiel:

$f(x) = \frac{10x-20}{x^2+4}$ $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q}$



Die Funktion f hat keine Definitionslücke.

f hat die Nullstelle N(2 | 0).

Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt S(0 | -5), da $f(0) = \frac{10 \cdot 0-20}{0^2+4} = -\frac{20}{4} = -5$

Waagrechte Asymptote:
y = 0
Senkrechte Asymptote:
Keine

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	-2	-3	-5	-5	0	1	1	0,88

Karte 8.6 Bruchterme

Bruchterm: Die Variable tritt auch im Nennerterm des Bruchs auf. $\frac{5x+2}{x-7}$

Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur **Definitionsmenge** des Bruchterms. ID = $\mathbb{Q} \setminus \{7\}$

Bruchterme können wie Brüche **erweitert und gekürzt** werden.

Erweitern: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden mit der gleichen Zahl (mit dem gleichen Term) multipliziert.

Beispiel: $\frac{4}{x} = \frac{8}{2x} = \frac{8(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{8(x+1)a}{2x(x+1)a} = \ldots$

…mit 2 …mit (x+1) …mit a **… erweitert.**

Kürzen: Der Zähler und der Nenner eines Bruchterms werden durch die gleiche Zahl (durch den gleichen Term) dividiert.

Beispiel: $\frac{25x^2y(a+1)}{10x(a+1)z} = \frac{25x^2y}{10xz} = \frac{5x^2y}{2xz} = \frac{5xy}{2z}$

…mit a+1 …mit 5 …mit x **… gekürzt.**

Beachte: Die größtmögliche Definitionsmenge kann sich beim Erweitern bzw. Kürzen eines Bruchterms ändern.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Gleichnamige Bruchterme werden addiert (subtrahiert), indem man ihre Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiel:

$\frac{8x}{x+2} + \frac{2}{x+2} - \frac{3x}{x+2} = \frac{8x+2-3x}{x+2} = \frac{5x+2}{x+2}$ ID = $\mathbb{Q} \setminus \{-2\}$

Ungleichnamige Bruchterme werden vorher gleichnamig gemacht.

Beispiel:

$\frac{3x+1}{x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{3(3x+1)}{3x} + \frac{2x-1}{3x} = \frac{9x+3+2x-1}{3x} = \frac{11x+2}{3x}$ ID = $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\frac{2}{x^2+2x} - \frac{4x-1}{x^2-4} = \frac{2}{x(x+2)} - \frac{4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{2(x-2)-(4x-1)x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-4x^2+x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{-4x^2+3x-4}{x(x+2)(x-2)}$

Multiplikation und Division von Bruchtermen - wie bei Brüchen:

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert. (KÜRZEN!)

Beispiel:

$\frac{8x}{x+2} \cdot \frac{3}{4x} = \frac{8x \cdot 3}{(x+2) \cdot 4x} = \frac{2 \cdot 3}{(x+2)} = \frac{6}{x+2}$ ID = $\mathbb{Q} \setminus \{0;-2\}$

Ein Bruchterm wird durch einen zweiten dividiert, indem man den ersten Bruchterm mit dem Kehrbruch des zweiten multipliziert.

Beispiel:

$\frac{5-x}{x+1} : \frac{3x-6}{x+1} = \frac{5-x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x-6} = \frac{5-x}{3x-6}$ ID = $\mathbb{Q} \setminus \{-1;2\}$

Karte 8.7 Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

RECHENARTEN

Besondere Potenzen: $x^0 = 1, x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $0{,}5^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 8$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ bzw. $x^a : x^b = x^{a-b}$ $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$

Beispiele: $4^2 \cdot 4^4 = 4^{2+4} = 4^6 = 4096$ $7^2 : 7^{-3} = 7^{2-(-3)} = 7^5 = 16807$

Potenzieren einer Potenz

$(x^a)^b = x^{ab}$ $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$

Beispiele: $(4^2)^4 = 4^8 = 65536$ $(3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$

Multiplizieren und Dividieren von Potenzen mit gleichem Exponenten

$x^a \cdot y^a = (xy)^a$ bzw. $x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ $x,y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $a,b \in \mathbb{Z}$

Beispiele: $3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5 = 7776$ $4^{-2} : 2^{-2} = (4:2)^{-2} = 2^{-2} = 0{,}25$

Karte 8.8 Lösen von (Un-) Gleichungen (I)

Gleichungen heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Äquivalenzumformungen sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man **3x + 1 = 7**

- ✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert. **3x + 1 = 7 |+3; 3x + 4 = 10**
- ✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert. **3x + 4 = 10 |-4; 3x = 6**
- ✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**. **3x = 6 |·2; 6x = 12**
- ✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**. **6x = 12 |:6; x = 2**

Beispiele:

a) Grundmenge: $G = \mathbb{N}$
Gleichung: $x + 12 = 4$ | –12
Neue Gleichung: $x = -8$
Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\}$ weil $-8 \notin \mathbb{N}$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

b) $G = \mathbb{Z}$
$4x - 3 = 25$ | +3
$4x = 28$ | :4
$x = 7 \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{7\}$

c) $G = \mathbb{Q}$
$7x + 4 = 3 - x$ | +x
$8x + 4 = 3$ | –4
$8x = -1$ | :8
$x = -0{,}125$
$\mathbb{L} = \{-0{,}125\}$

ACHTUNG: Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen!

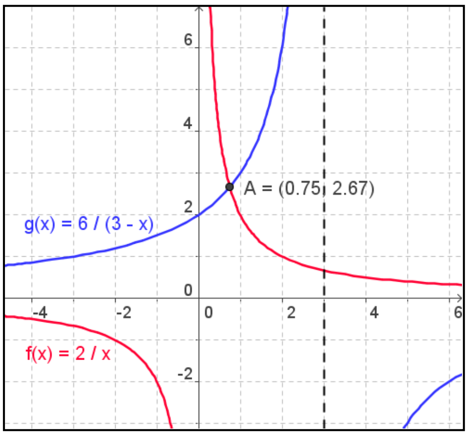
d) $-4x < 24$ | :(-4)
$x > -6$
$\mathbb{L} = \{x \mid x > 6\}$ **Mengenschreibweise**
$=]6; +\infty[$ **Intervallschreibweise**

e) $-x \geq -31$ | ·(-1)
$x \leq 31$
$\mathbb{L} = \{x \mid x \leq 31\}$
$=]-\infty; 31]$

Gleichungen, bei denen die Variable in mindestens einem der Nenner auftritt nennt man **Bruchgleichung**.

Beispiel: $\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$

Graphische Lösung:
Man zeichnet zuerst die Funktionsgraphen der beiden Gleichungsseiten.
Dann liest man die x-Koordinaten aller gemeinsamen Punkte ab.



Im Beispiel:
Die Graphen der Funktionen
f: f(x) $= \frac{2}{x}$ und **g: g(x)** $= \frac{6}{3-x}$
haben nur den Punkt A $(0{,}75 \mid 2{,}\overline{6})$ gemeinsam, die Bruchgleichung hat also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Definitionsmenge angeben: $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$

Rechnerische Lösung:
Beide Seiten der Bruchgleichung mit einem gemeinsamen Nenner (am besten mit dem Hauptnenner) aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen.

$$\frac{2}{x} = \frac{6}{3-x}$$

HN: $(3-x)\cdot x$

$$\frac{2\cdot(3-x)\cdot x}{x} = \frac{6\cdot(3-x)\cdot x}{3-x}$$

Vereinfachte Gleichung wie üblich lösen.
Prüfen, ob die ermittelte Lösung zur Definitionsmenge gehört.

$$\begin{aligned} 2\cdot(3-x) &= 6\cdot x && \mid \text{TV} \\ 6 - 2x &= 6x && \mid +2x \\ 6 &= 8x && \mid :8 \\ x &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Probe machen: LS: $\frac{2}{0{,}75} = 2\frac{2}{3}$ RS: $\frac{6}{3-0{,}75} = \frac{6}{2{,}25} = 2\frac{2}{3}$ LS = RS ✓

Lösungsmenge angeben: $\mathbb{L} = \{0{,}75\}$.

Weiteres Beispiel: $\frac{2x+2}{x-6} = \frac{4x-140}{2x}$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$

HN: 2x(x-6) $\frac{(2x+2)2x(x-6)}{x-6} = \frac{(4x-140)2x(x-6)}{2x}$

$$(2x+2)2x = (4x-140)(x-6)$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x &= 4x^2 - 24x - 140x + 840 && \mid -4x^2 \\ 4x &= -164x + 840 && \mid +164x \\ 168x &= 840 && \mid :168 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{5\}$.

Probe: LS = (2·5+2):(5-6) = 12:(-1) = -12 RS = (4·5-140):(2·5) = -120:10 = -12 LS = RS ✓

Karte 8.9
Lösen von Gleichungen (II)

Karte 8.10
Bruch-gleichungen

Karte 8.11 Zufalls-experimente

Vorgänge, deren Ergebnis **zufällig**, d.h. nicht voraussagbar ist, nennen wir **Zufallsexperimente.**

Beispiele: Werfen einer Münze ; Ziehen von Kugel (Lottozahlen) ; Glücksrad drehen ; Spielwürfel werfen

Beispiel: Ein Spielwürfel wird 25-mal geworfen: Treffer (T) wäre z.B. eine Sechs, eine Niete (N) wäre dann eine 1, 2, 3, 4 oder 5.

Ergebnisse:

Strichliste

Augenzahl	Anzahl
6	||||
keine 6	卌 卌 卌 卌 |

Tabelle

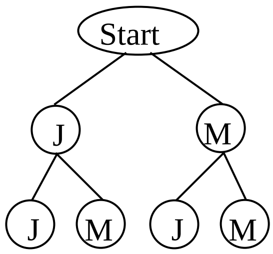
Augenzahl	Anzahl
6	4
keine 6	21

Karte 8.12 Ergebnismenge

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zu einer **Ergebnis-menge** (man spricht auch von einem **Ergebnisraum)** zusammen.
Diese wird häufig mit dem Buchstaben Ω bezeichnet.

Beispiel:
Geschwisterfolge bei zwei Kindern (**J**unge/**M**ädchen)
Mögliche Ergebnisse: JJ; JM; MJ; MM
Ergebnismenge Ω = {JJ; JM; MJ; MM}

Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments lassen sich durch ein **Baumdiagramm** übersichtlich darstellen.



Karte 8.13 Ereignisse

Werden bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammengefasst, so erhält man ein **Ereignis.**

Die Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse.**

Ein Ereignis, für das alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments günstig sind, heißt **sicheres Ereignis.**

Ein Ereignis, das bei diesem Zufallsexperiment nicht eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis.**

Alle für ein Ereignis E ungünstigen Ergebnisse bilden zusammen dessen **Gegenereignis $\overline{E}$.**

Ereignisse werden häufig in Mengenform angegeben.

Beispiele:

Experiment: Werfen eines Würfels
Ereignis E_1: Werfen einer geraden Augenanzahl

Die Augenanzahlen 2 und 4 und 6.
$E_1 = \{ 2; 4; 6\}$

E_2: Werfen einer natürlichen Zahl
$E_2 = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$

E_3: Werfen der Zahl -5
$E_3 = \{ \} = \emptyset$

Gegenereignis zu E_1
$\overline{E_1}$: Werfen einer ungeraden Augenanzahl
$\overline{E_1} = \{ 1; 3; 5\}$

Karte 8.14 Relative Häufigkeit

Ein Spielwürfel wird n-mal (z.B. 25-mal) geworfen und es erscheint dabei k-mal (z.B. 4-mal) die Augenzahl 6.

Absolute Häufigkeit der „Sechser“: 4 (Anzahl der Sechser“)

Relative Häufigkeit der „Sechser“: $\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=16\%$ (Anteil der „Sechser“)

Allgemein: **Relative Häufigkeit**

$$\frac{k}{n}=\frac{\text{"Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eingetreten ist"}}{\text{"Anzahl, wie oft das Experiment durchgeführt wurde"}}$$

Karte 8.15 Wahrscheinlichkeit

Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft durch, so ändert sich die relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis E eintritt, schließlich nur noch sehr wenig:

Die relative Häufigkeit des Ereignisses E schwankt um eine feste Zahl.

Diese Zahl bezeichnet man als die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses E.

Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E ist ein **Schätzwert** für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Beispiel: Experiment: Werfen einer Münze

Anzahl n der Würfe	Anzahl k der „Adler“	Relative Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit)
100	48	0,48 = 48 %
1000	517	0,517 = 51,7 %

Karte 8.16 Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente.**

Sind bei einem Laplace-Experiment 2 (3; 4; 5; 6; ... n) verschiedene Ergebnisse möglich, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser Ergebnisse:

$\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\ldots;\frac{1}{n}\right)$.

Dementsprechend nennt man einen idealen Spielwürfel einen **Laplace-Würfel** (L-Würfel), eine ideale Münze **Laplace-Münze** (L-Münze).

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Bei Laplace-Experimenten kann man die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E direkt berechnen:

$$P(E)=\frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen das Ereignis E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments}}$$

$$=\frac{\text{„Anzahl der günstigen Ergebnisse"}}{\text{„Anzahl aller möglichen Ergebnisse"}}$$

Karte 8.16
Zählprinzip

Es sollen z. B. vier Stellen besetzt werden.

Gibt es für die Besetzung der	1.Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle
	n_1	n_2	n_3	n_4

verschiedene Möglichkeiten,
so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$ verschiedene Besetzungsmöglichkeiten.

Beispiel:
Wie viele verschiedene fünfstellige natürliche Zahlen kann man aus den Ziffern 1; 3; 5; 7; 0 bilden, wenn jede dieser Ziffern…

a) genau einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$
…

Null darf nicht vorne stehen!

Bleiben noch 4 Mögliche …

b) auch mehr als einmal vorkommen darf?
Lösung: Anzahl der möglichen Zahlen: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$

Beispiel:
Auf wie viele Arten kann man vier verschiedene Bücher nebeneinander in ein Regal stellen?

Lösung: Anzahl der Möglichkeiten: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Karte 8.17 Lineare Gleichungs-Systeme (I)

Zwei lineare Gleichungen, die zwei Variable enthalten, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Zu jeder der beiden Gleichungen existieren unendlich viele Lösungen. Sie lassen sich durch Punkte des Graphen der entsprechenden linearen Funktion veranschaulichen.

I) 3y + x = 9 → $g(x) = -\frac{1}{3}x + 3$

II) y = 3x – 2 → f(x)= 3x – 2

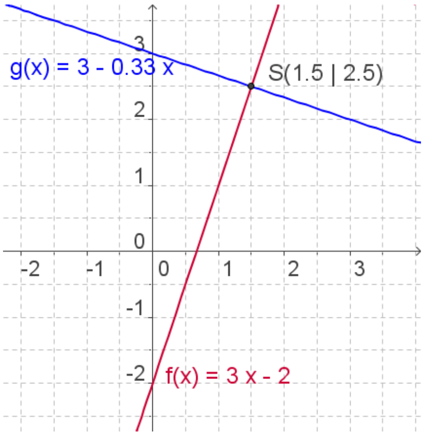
Die Koordinaten $x_s = 1{,}5$; $y_s = 2{,}5$ des Schnittpunkts S (1,5 I 2,5) der zugehörigen Geraden erfüllen als einzige beide Gleichungen.

Sie bilden zusammen die (einzige) Lösung des Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge also $\mathbb{L} = \{(1{,}5 \mid 2{,}5)\}$ ist.

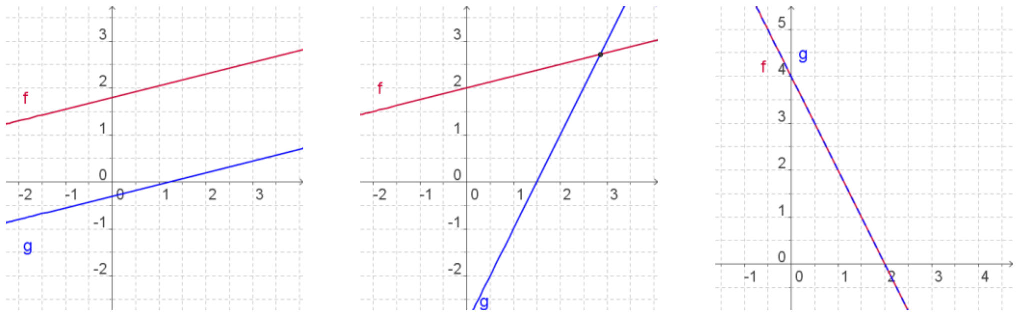
Beispiel:

I) 3y + x = 9

II) y = 3x - 2



Ein lineares Gleichungssystem besitzt keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem, ob die zugehörigen Geraden zueinander parallel sind, einander schneiden oder zusammenfallen.



Die Lösung kann **graphisch** gefunden werden, indem man die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem einträgt und die Koordinaten ihres Schnittpunkts abliest.

Das **Gleichsetzungsverfahren:**

1. Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variablen $\quad y = -\frac{1}{3}x + 3$ und $y = 3x - 2$
2. Gleichsetzen der beiden neuen rechten Seiten $\quad -\frac{1}{3}x + 3 = 3x - 2 \quad |\cdot 3$
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält
   $– x + 9 = 9x – 6 \quad | +x , +6$
   $15 = 10x \quad | :10$
   $x = 1{,}5$
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen $\quad y = 3 \cdot 1{,}5 – 2 = 2{,}5$
5. Angeben der Lösungsmenge $\quad \mathbb{L} = \{(1{,}5 \mid 2{,}5)\}$

Karte 8.18 Lineare Gleichungs-Systeme (II)

Das **Einsetzungsverfahren:**

1. Auflösen einer der Gleichungen nach einer der Variablen — $3y + x = 9$; $y = 3x - 2$
2. Einsetzen des gefundenen Terms in die andere Gleichung — $3(3x - 2) + x = 9$; $9x - 6 + x = 9$; $10x - 6 = 9$
3. Lösen der so erhaltenen Gleichung, die nur noch eine Variable enthält — $10x = 15$; $x = 1{,}5$
4. Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen und Ermitteln des Werts der anderen Variablen — $y = 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 2{,}5$
5. Angeben der Lösungsmenge — $\mathbb{L} = \{(1{,}5 \mid 2{,}5)\}$

Das **Additionsverfahren:**

Unterscheiden sich bei einem Gleichungssystem die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen, so ist es günstig, die beiden Gleichungen zu addieren, da dann eine der beiden Variablen „wegfällt".

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 12x + 7y & = & 45 & \\ \text{II} & -5x - 7y & = & -31 & \\ \hline \text{I + II} & 7x & = & 14 & \mid :7 \\ & x & = & 2 & \end{array}$$

In Gleichung I eingesetzt:

$$12 \cdot 2 + 7y = 45$$
$$7y = 21$$
$$y = 3$$
$$\mathbb{L} = \{(2 \mid 3)\}$$

Verallgemeinerung (siehe unten):
Wenn keine der beiden Variablen sofort durch bloßes Addieren „wegfällt", muss man eine der Gleichungen (oder beide Gleichungen) vor dem Addieren zunächst mit einem geeigneten Faktor (bzw. mit geeigneten Faktoren) multiplizieren.

Natürlich führt jedes dieser drei Verfahren zur gleichen Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & -3x - 11y & = & 23 & \mid \cdot 5 \\ \text{II} & 5x - 7y & = & 63 & \mid \cdot 3 \\ \hline \text{I'} & -15x - 55y & = & 115 & \\ \text{II'} & 15x - 21y & = & 189 & \\ \hline \text{I' + II'} & -76y & = & 304 & \mid :(-76) \\ & y & = & -4 & \end{array}$$

In Gleichung II eingesetzt:

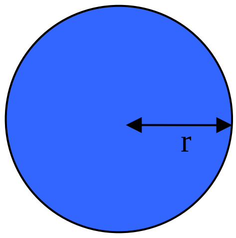
$$5x - 7 \cdot (-4) = 63$$
$$5x + 28 = 63$$
$$5x = 35$$
$$x = 7$$
$$\mathbb{L} = \{(7 \mid -4)\}$$

Karte 8.19
Kreis

Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14159265$

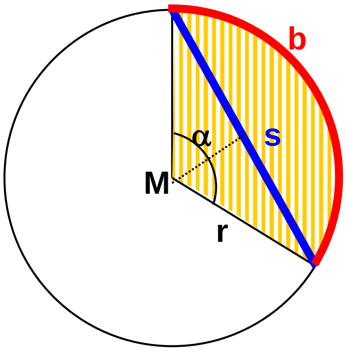
Flächeninhalt : $A_{Kreis} = \pi r^2$

Umfang: $U_{Kreis} = 2\pi r$



Kreisbogen Radiuslänge r Mittelpunkt M α: Mittelpunktswinkel

Bogenlänge **b =** $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{r\pi\alpha}{180°}$



Kreissektor $A_{Sektor} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$

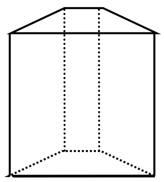
Beispiel: Kreis mit $r = 2{,}7$:
$A = 2{,}7^2\pi = 7{,}29\pi$
$U = 2 \cdot 2{,}7\pi = 5{,}4\pi$

Karte 8.20 Volumen und Oberflächeninhalt (I)

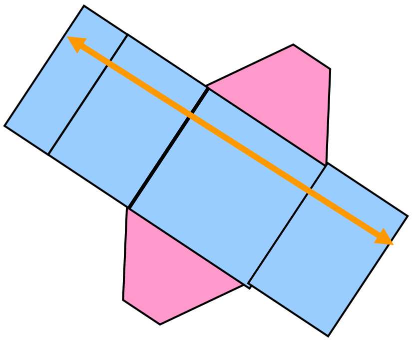
Gerades Prisma Zylinder

Gerades Prisma:

Grundfläche und Deckfläche sind kongruente n-Ecke und zueinander parallel.



Mantel: Alle Seitenflächen (Rechtecke) zusammen.



Volumen: $V_{Prisma} = G \cdot h$

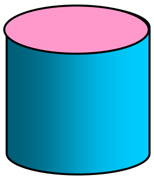
Oberflächeninhalt: $A_{Prisma} = 2 \cdot G + M$

$= 2 \cdot G + U \cdot h$

(**U: Umfangslänge**)

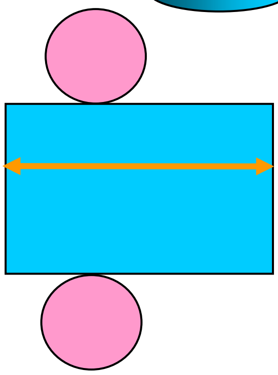
Gerader Kreiszylinder:

Grundfläche und Deckfläche sind kongruente Kreise und zueinander parallel. $G = r^2 \cdot \pi$



Mantel: Seitenfläche (Rechteck)

$M = U \cdot h = \mathbf{2} \cdot r \cdot \pi \cdot h$



Oberflächeninhalt: $A_{Zylinder} = 2 \cdot G + M$

$= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$

Volumen: $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

(**U: Umfangslänge**)

Beispiel: Zylinder mit $r = 2{,}5$ *und* $h = 3$*:*

Volumen: $V = r^2\pi h = 2{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 = 18{,}75\pi$

Oberfläche: $O = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2 \cdot 2{,}5^2\pi + 2 \cdot 2{,}5 \cdot \pi \cdot 3 = 27{,}5\pi$