

Prozentsatz

$$20\% (= \frac{1}{5})$$

Grundwert

40 Euro

Prozentwert

8 Euro

20% von 40 Euro sind genau 8 Euro

Rechnung:

$$40 : 100 \cdot 20 = 40 : 5 = 8$$

Das Ganze, dessen Anteile verglichen werden, bildet den **Grundwert**.

Jeden **Anteil** am Ganzen kann man (in **Bruchform** oder) in **Prozent** angeben; **Prozentsatz** genannt.

Der jeweilige Teil des Ganzen bildet den **Prozentwert**.

Beispiel: In einem Lostopf sind 80 Lose, darunter sind 32 Gewinne! Wie viel Prozent sind Nieten?

Grundwert: 80

Prozentwert: 48

$$\text{Prozentsatz (Anteil in \%): } \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Wird der Grundwert (z. B. der Preis eines Fernsehers) um p Prozent erhöht, so steigt er auf das $(1 + \frac{p}{100})$ -Fache des ursprünglichen Werts. Man nennt $(1 + \frac{p}{100})$ den **Wachstumsfaktor**.

Beispiel: Ein Fernseher (320 €) wird um **10% teurer**:

$$\text{Neuer Preis: } 320 \text{ €} \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 320 \text{ €} \cdot 1,10 = 352 \text{ €}$$

Wird der Grundwert (z. B. der Preis einer Waschmaschine) um p Prozent vermindert, so nimmt er auf das $(1 - \frac{p}{100})$ -Fache des ursprünglichen Werts ab. Man nennt $(1 - \frac{p}{100})$ den **Abnahmefaktor**.

Beispiel: Eine Waschmaschine (490 €) wird um **15% billiger**:

$$\text{Neuer Preis: } 490 \text{ €} \cdot (1 - \frac{15}{100}) = 490 \text{ €} \cdot 0,85 = 416,50 \text{ €}$$


Grundgleichung der Prozentrechnung

$$\text{Prozentsatz} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$

Beispiel:

PREISREDUZIERUNG UM 15 %

Fußballschuhe nur noch **63,75 €**



Berechne den ursprünglichen Preis.
Grundwert: x ; Prozentsatz: 85%;
Prozentwert: 63,75 €.
 $0,85 \cdot x = 63,75 \text{ €} \quad | : 0,85$
 $x = 63,75 \text{ €} : 0,85$
 $x = 75 \text{ €}$
Der ursprüngliche Preis war 75 €.

Das **arithmetische Mittel** berechnet man so: Man addiert alle Einzelwerte und teilt diesen Summenwert durch die Anzahl aller Einzelwerte.

Beispiele: Einzelwerte 12 kg , 14,3 kg , 15,1 kg und 15,9 kg
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{12kg + 14,3kg + 15,1kg + 15,9kg}{4} = \frac{57,3kg}{4} = 14,325kg \approx 14,3kg$$

Einzelwerte 5 mal Note 1 , 12 mal Note 2 , 6 mal Note 3
Das arithmetische Mittel (Mittelwert):

$$\frac{5 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{(5 + 12 + 6)} = \frac{47}{23} \approx 2,04$$

Median

Der **Median** eines Datensatzes ist bei ungerader Anzahl von Daten der Wert in der Mitte des geordneten Datensatzes, bei gerader Anzahl das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte des geordneten Datensatzes.

Spannweite

Die **Spannweite** eines Datensatzes ist die Differenz aus größtem und kleinstem Wert des Datensatzes.

Quartile

Der Median „zerlegt“ einen geordneten Datensatz in einen unteren und einen oberen Block.

Das **untere Quartil** ist der Median vom unteren Block des geordneten Datensatzes, das **obere Quartil** der Median vom oberen Block. Dabei ist zu beachten, dass der Median zu keinem der beiden Blöcke gehört.

Statistische Kenngrößen eines Datensatzes sind das arithmetische Mittel, der Median, die Spannweite und die Quartile.

Ein **Boxplot** besteht aus einem Rechteck (Box) und zwei Antennen. Unteres und oberes Quartil begrenzen das Rechteck. Der Median liegt im Rechteck und die Antennen werden durch das Minimum und Maximum der Werte festgelegt. Zu jedem Boxplot gehört eine Achse mit Werten.

Die statistischen Kenngrößen arithmetisches Mittel, Median und Quartil können mit geeigneten **Mathematikprogrammen** ermittelt werden, ohne dass ein geordneter Datensatz vorliegt.

Median 2,4

0,6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,3	3,4	3,7	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Median 2,1

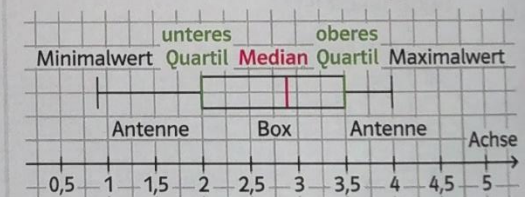
0,6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,3	3,4	3,7
1	2	3	4	5	6	7	8

0,6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,3	3,4	3,7
1	2	3	4	5	6	7	8

$$\text{Spannweite: } 3,7 - 0,6 = 3,1$$

unteres Quartil 0,9				oberes Quartil 3,35			
0,6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,3	3,4	3,7
unterer Block				oberer Block			

unteres Quartil 1,2				oberes Quartil 3,7			
0,6	0,6	1,2	1,8	2,4	3,3	3,4	3,7
unterer Block				oberer Block			



Terme mit Variablen

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der außer Zahlen und Rechenzeichen auch veränderliche Größen, so genannte **Variable**, enthalten kann.

Für die Platzhalter wie z. B. \square oder \heartsuit bzw. Variable wie z. B. a , c , x , oder z darf man verschiedene Zahlen einsetzen, die in der so genannten **Grundmenge G** angegeben sind. Wird in einen Term für die Variable eine Zahl aus der Grundmenge eingesetzt, so lässt sich der zugehörige Termwert berechnen.

Beispiel:

$$G = \{-2; 0; 1\}$$

$$T_1(\textcolor{red}{x}) = 4 \cdot \textcolor{red}{x}^2 + 13$$

-2 einsetzen:

$$\begin{aligned} T_1(\textcolor{red}{-2}) &= 4 \cdot (\textcolor{red}{-2})^2 + 13 \\ &= 4 \cdot 4 + 13 = 16 + 13 = \underline{\underline{29}} \end{aligned}$$

0 einsetzen:

$$T_1(\textcolor{red}{0}) = 4 \cdot \textcolor{red}{0}^2 + 13 = 0 + 13 = \underline{\underline{13}}$$

1 einsetzen:

$$T_1(\textcolor{red}{1}) = 4 \cdot \textcolor{red}{1}^2 + 13 = 4 + 13 = \underline{\underline{17}}$$

$$T_2(\heartsuit) = 3 \cdot \heartsuit + 7$$

$$\begin{aligned} T_2(\textcolor{blue}{-2}) &= 3 \cdot (\textcolor{blue}{-2}) + 7 \\ &= -6 + 7 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$T_2(\textcolor{blue}{0}) = 3 \cdot \textcolor{blue}{0} + 7 = 0 + 7 = \underline{\underline{7}}$$

$$T_2(\textcolor{blue}{1}) = 3 \cdot \textcolor{blue}{1} + 7 = 3 + 7 = \underline{\underline{10}}$$

Vereinbarung:

Man kann den Malpunkt bei Termen weggelassen, wenn es zu keinen Verwechslungen kommen kann.

Beispiele:

$$7 \cdot y = 7y$$

$$13 \cdot (a + 2z) = 13(a + 2z)$$

$$a \cdot b = ab$$

$$x \cdot (5s - a) = x(5s - a)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)$$

Wenn bei jeder möglichen Einsetzung für die Variablen der eine Term stets den gleichen Wert hat wie der andere, so nennt man die beiden Terme **äquivalent**.
Man kann einen Term mit Hilfe von Rechengesetzen in einen anderen ihm äquivalenten Term umformen.

Beispiele: $7 \cdot y$ und $y \cdot 7$ sind äquivalente Terme
 $7 + a$ und $a + 6 + 1$ sind äquivalente Terme

Addieren und Subtrahieren

Gleichartige Glieder werden wie folgt addiert bzw. subtrahiert:

- ✓ Die **gemeinsame Variable** wird beibehalten.
- ✓ Die **Koeffizienten** werden addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele:

$6a + 12a = 18a$	$100x + 42x = 142x$
$17s - 13s = 4s$	$5y - 9y = -4y$

Auflösen von Klammern bei der Addition und Subtraktion

Steht vor einer Klammer ein **Pluszeichen**, so kann man die Klammer weglassen, ohne dass sich der Wert des Terms ändert.

Beispiele:

$$8a + (7a + 2a) = 8a + 7a + 2a = 17a$$

$$8a + (7a - 2a) = 8a + 7a - 2a = 13a$$

$$8a + (-7a + 2a) = 8a + (-7a) + 2a = 8a - 7a + 2a = 3a$$

Steht vor der Klammer ein **Minuszeichen**, so wird beim Auflösen der Klammer in der Klammer jedes Pluszeichen zu **minus** und jedes Minuszeichen zu **plus**.

Beispiele:

$$8a - (7a + 2a) = 8a - 7a - 2a = -1a = -a$$

$$8a - (7a - 2a) = 8a - 7a + 2a = 3a$$

$$8a - (-7a + 2a) = 8a + 7a - 2a = 13a$$

Multiplizieren und Dividieren

So multipliziert man ein Produkt mit einer Zahl:

Es wird nur **einer** der Faktoren mit dieser Zahl multipliziert!

Beispiele:

$$(8 \cdot y) \cdot 3 = (8 \cdot 3) \cdot y = 24 \cdot y = 24y$$
$$(a \cdot b) \cdot a = (a \cdot a) \cdot b = a^2 \cdot b = a^2b$$

Wie dividiert man ein Produkt durch eine Zahl?

Indem man nur **einen** der Faktoren durch diese Zahl dividiert.


Beispiele:

$$(15 \cdot a) : 3 = (15 : 3) \cdot a = 5 \cdot a = 5a$$
$$(a \cdot b) : a = (a : a) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

Multiplizieren und Dividieren von Summen und Differenzen


Man multipliziert eine Summe mit einem Faktor, indem man jedes Glied der Summe mit diesem Faktor multipliziert und dann die Produkte addiert (Bei Differenz ebenso).

Beispiel:


$$8 \cdot (12 + x - 3y) = 8 \cdot 12 + 8 \cdot x - 8 \cdot 3y = 96 + 8x - 24y$$

Man dividiert eine Summe durch einen (von null verschiedenen) Divisor, indem man jedes Glied der Summe durch diesen Divisor dividiert und dann die Quotienten addiert (Bei Differenz ebenso).

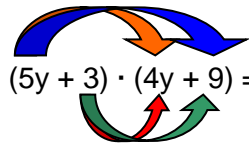
Beispiel:


$$(12 + 4x - 6y) : 2 = 12 : 2 + 4x : 2 - 6y : 2 = 6 + 2x - 3y$$

Ausmultiplizieren von Klammern

Man multipliziert eine Summe (Differenz) mit einer Summe (Differenz), indem man jedes Glied der ersten Summe (Differenz) mit jedem Glied der zweiten Summe (Differenz) **unter Beachtung der Vor- und Rechenzeichen** multipliziert und dann die Teilprodukte addiert bzw. subtrahiert.

Beispiele:



$$(5y + 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y + 12y + 27 = 20y^2 + 57y + 27$$

$$(5y - 3) \cdot (4y + 9) = 20y^2 + 45y - 12y - 27 = 20y^2 + 33y - 27$$

$$(5y + 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y + 12y - 27 = 20y^2 - 33y - 27$$

$$(5y - 3) \cdot (4y - 9) = 20y^2 - 45y - 12y + 27 = 20y^2 - 57y + 27$$

Ausklammern

Durch Ausklammern eines Faktors wird aus einer Summe (Differenz) ein **Produkt**.

Beispiele:

$$6x + 18y = 6(x + 3y)$$

$$5xyz + 20xyw = 5xy(z + 4w)$$

$$-5w - 2s = (-1) \cdot (5w + 2s) = -(5w + 2s)$$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel

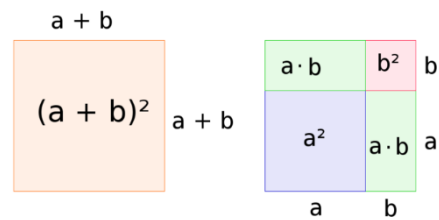
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Beispiele:**

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot 2xy + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$(k^2 - 3n)(k^2 + 3n) = (k^2)^2 - (3n)^2 = k^4 - 9n^2$$

Grundbegriffe

Eine Gleichung besteht aus **zwei Termen**, die miteinander durch ein **Gleichheitszeichen** verbunden sind.

Setzt man für die Variable eine Zahl in die Gleichung ein, so kann sich eine wahre oder eine falsche Aussage ergeben.

Die (vorgegebene) Menge aller Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung zur Verfügung stehen, heißt **Grundmenge G**.

Die Zahlen der Grundmenge G, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage liefern, heißen **Lösungen** dieser Gleichung.

Die Lösungen fasst man zur **Lösungsmenge IL** dieser Gleichung zusammen.

Wenn kein Element der Grundmenge G beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, dann ist die Lösungsmenge die **leere Menge**, geschrieben $\{ \}$ (oder \emptyset).

Beispiel:

$$x + 3 = 2x - 7$$

$$4 + 3 = 2 \cdot 4 - 7 \\ 7 = 1 \quad \text{falsch}$$

$$G = \mathbb{N}$$

$$10 + 3 = 2 \cdot 10 - 7 \\ 13 = 13$$

$$IL = \{10\}$$

$$G = \{1; 2; 3\} \\ x + 3 = 2x - 7 \\ IL = \{ \}$$

Gleichungen (mit der gleicher Grundmenge) heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Äquivalenzumformungen sind Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert.

Mit ihnen vereinfachen wir komplizierte Gleichungen!

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- ✓ zu den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term addiert.
- ✓ von den beiden Seiten dieser Gleichung **dieselbe Zahl** bzw. denselben Term subtrahiert.
- ✓ beide Seiten dieser Gleichung mit derselben (von null verschiedenen) **Zahl multipliziert**.
- ✓ beiden Seiten dieser Gleichung durch dieselbe (von null verschiedene) **Zahl dividiert**.

Beispiel:

Grundmenge:	$G = \mathbb{Q}$	
Gleichung:	$7x + 4 = 3 - x$	$+x$
	$8x + 4 = 3$	-4
	$8x = -1$	$:8$
	$x = -0,125 \in G$	
Lösungsmenge:	$IL = \{-0,125\}$	

Beispiel:

$$3x + 1 = 7$$

$$1 + x + x + x = 2 + 5$$

$$IL = \{2\}$$

$$3x + 1 = 7$$

$$3x + 1 = 7 \quad | +3$$

$$3x + 4 = 10$$

$$3x + 4 = 10 \quad | -4$$

$$3x = 6$$

$$3x = 6 \quad | :3$$

$$x = 2$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Hinter der Gleichung steht hinter einem Strich die Äquivalenzumformung...

Strecke \overline{AB} mit den Endpunkten A und B
und der Streckenlänge $|\overline{AB}| = 3,2 \text{ cm}$

Gerade \overleftrightarrow{CD}

Halbgerade (Strahl) \overrightarrow{EF} mit Anfangspunkt E

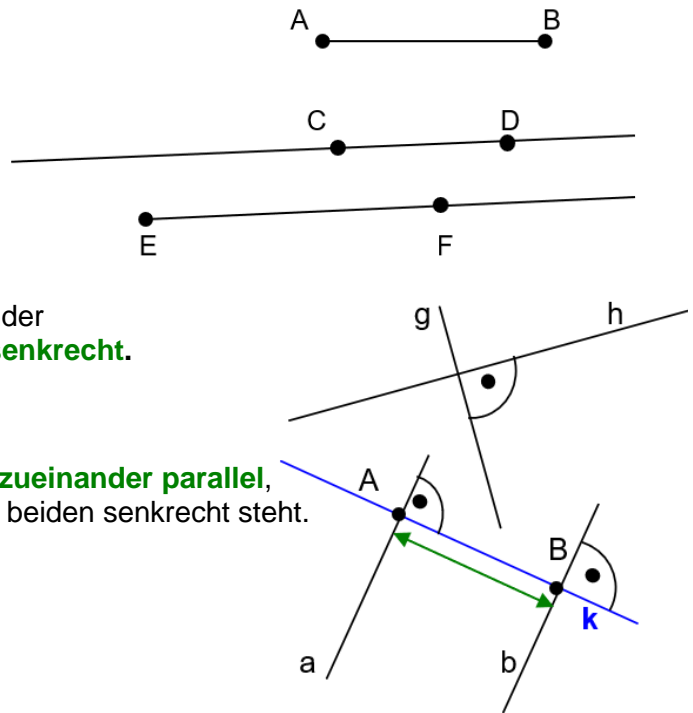
Geraden, Halbgeraden oder Strecken, die miteinander
einen rechten Winkel bilden, stehen **aufeinander senkrecht**.

Schreibweise: $g \perp h$

Zwei Geraden a und b (der Zeichenebene) heißen **zueinander parallel**,
wenn es eine dritte Gerade **k** gibt, die auf jeder der beiden senkrecht steht.

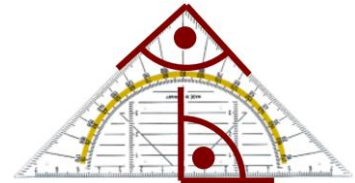
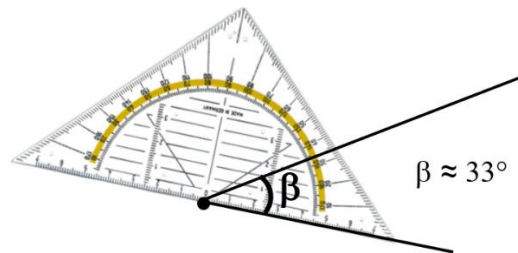
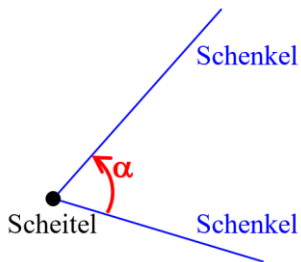
Schreibweise: $a \parallel b$

Abstand d der Geraden a und b: $d = |\overline{AB}|$

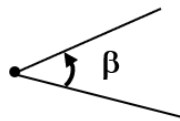


Die Größe eines Winkels wird in Grad ($^{\circ}$) gemessen.

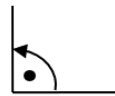
Rechte Winkel (90°) am Geodreieck:



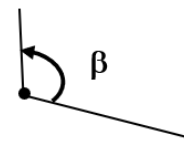
Nullwinkel
 $\beta = 0^{\circ}$



Spitzer Winkel
 $0^{\circ} < \beta < 90^{\circ}$



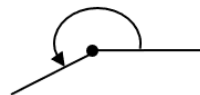
Rechter Winkel
 $\beta = 90^{\circ}$



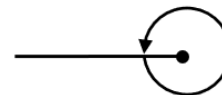
Stumpfer Winkel
 $90^{\circ} < \beta < 180^{\circ}$



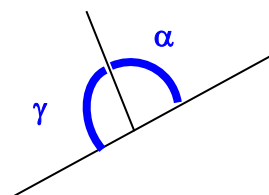
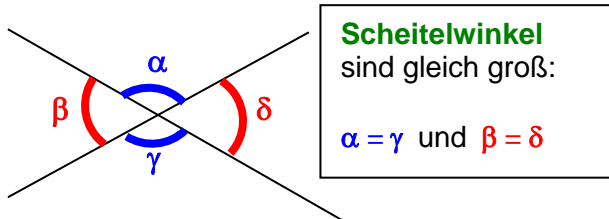
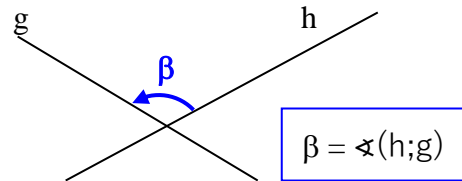
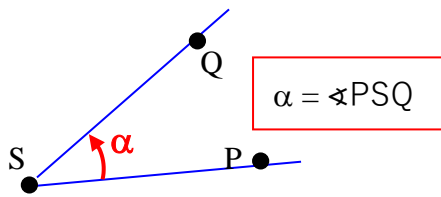
Gestreckter Winkel
 $\beta = 180^{\circ}$



Überstumpfer Winkel
 $180^{\circ} < \beta < 360^{\circ}$

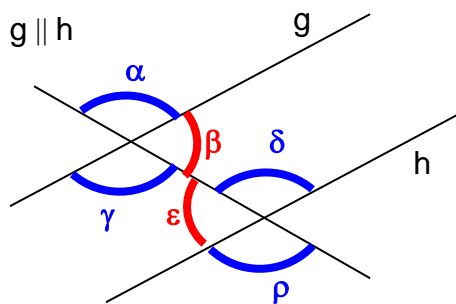


Vollwinkel $\beta = 360^{\circ}$



Nebenwinkel ergeben zusammen 180° :

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

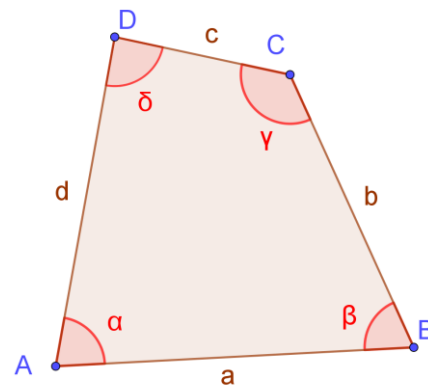
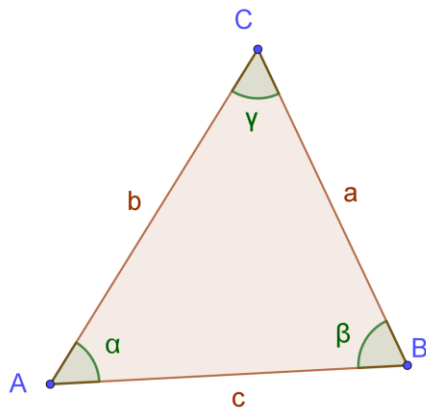


Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß:

$$\alpha = \rho \text{ oder } \gamma = \delta \text{ oder } \beta = \epsilon$$

Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß:

$$\alpha = \delta \text{ oder } \gamma = \rho$$



Die **Winkelsumme** der Innenwinkel in einem...

... **Viereck beträgt 360°** : $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

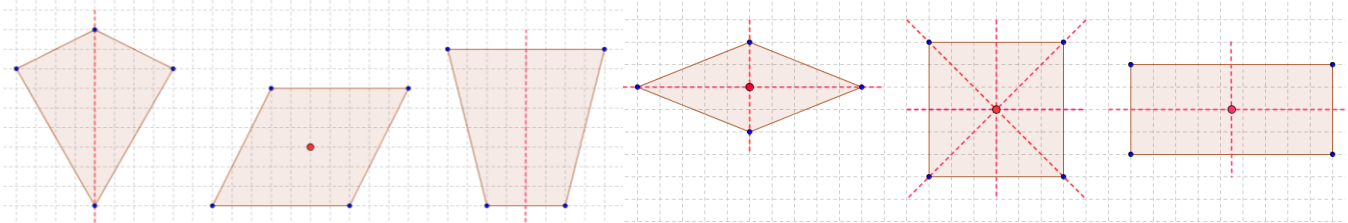
... **Dreieck beträgt 180°** : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

... **n-Eck beträgt**: $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Drachenviereck

Gleichschenkliges Trapez

Quadrat



Parallelogramm

Raute

Rechteck

Eine Figur ist achsensymmetrisch, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen; die Faltkante heißt dann **Symmetrieachse**.

Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang.

$$|\overline{AC}| = |\overline{A^*C^*}|$$

$$r = r^*$$

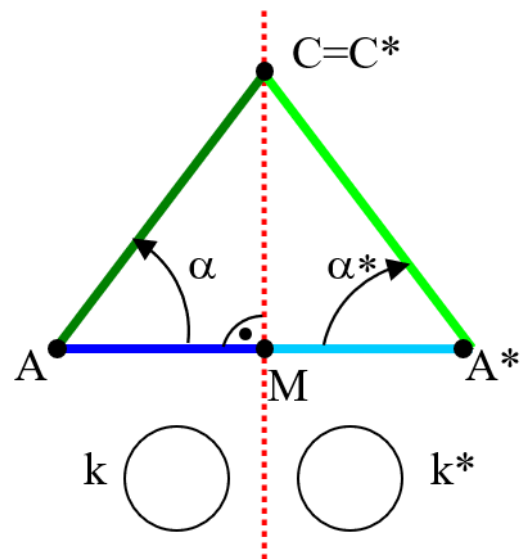
Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn.

$$\alpha = \alpha^*$$

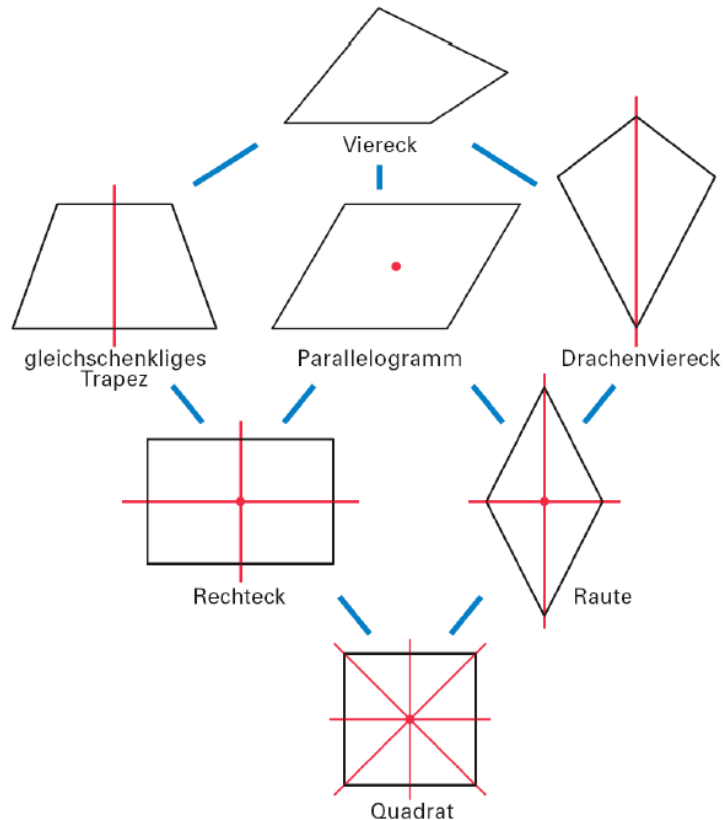
Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Die Verbindungsstrecke zueinander symmetrischer Punkte wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

$$|\overline{AM}| = |\overline{MA^*}|$$

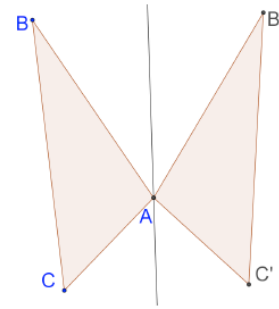


Symmetrie bei Vierecken

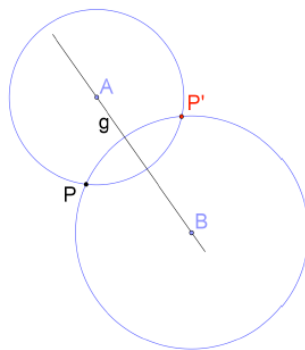


Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

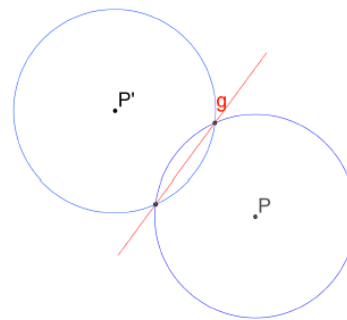
- **Längentreue:** Symmetrische Strecken sind gleich lang.
- **Winkeltreue:** Symmetrische Winkel sind gleich groß.
- Der Drehsinn ändert sich.
- Die Strecke von einem Punkt zum symmetrischen Punkt wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert.
- Alle Punkte der Symmetrieachse sind von Punkt und Bildpunkt gleich weit entfernt.



Konstruktionen:



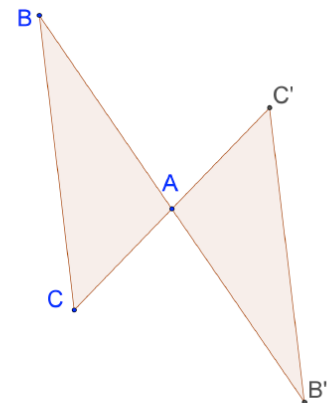
Konstruktion des Bildpunkts



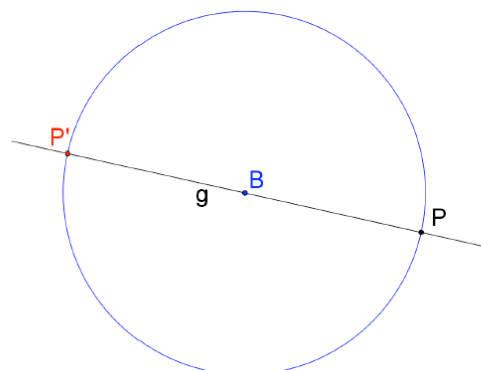
Konstruktion der Achse

Punktsymmetrie und Punktspiegelung

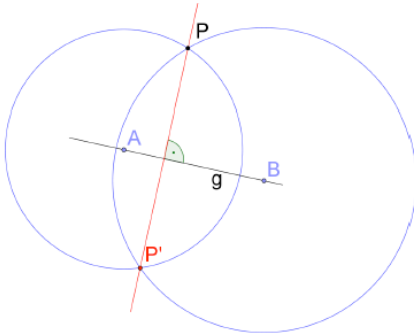
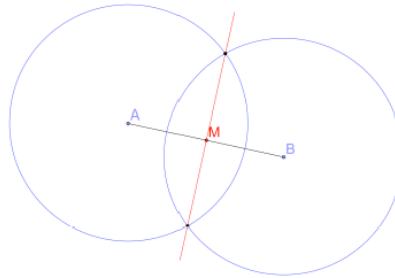
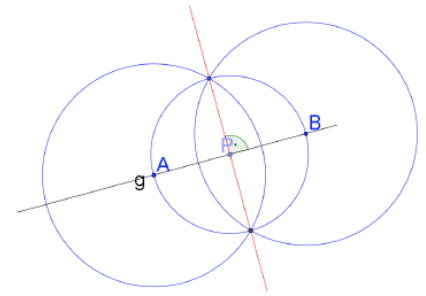
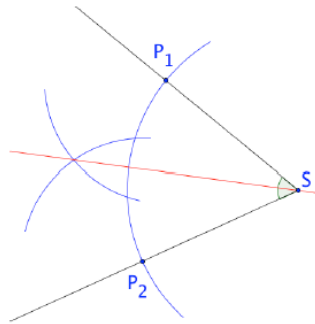
- eine punktsymmetrische Figur wird bei einer Halbdrehung (um 180°) in sich selbst übergeführt.
- **Längentreue:** Symmetrische Strecken sind gleich lang.
- **Winkeltreue:** Symmetrische Winkel sind gleich groß und haben dieselbe Orientierung.
- Die Strecke von einem Punkt zum symmetrischen Punkt wird vom Zentrum halbiert.



Konstruktion:



Konstruktion des Bildpunkts

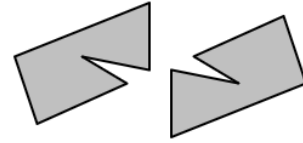
Grundkonstruktionen:**Lot fällen****Mittelsenkrechte****Lot errichten****Winkel halbieren**

Lassen sich zwei Figuren vollständig miteinander zur Deckung bringen, so heißen sie **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent**.

Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie...

- ✓ in den Längen der drei Seiten übereinstimmen (**sss-Satz**).
- ✓ in den Längen von zwei Seiten und in der Größe von deren Zwischenwinkel übereinstimmen (**sws-Satz**).
- ✓ in der Länge einer Seite und in den Größen der beiden dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen (**wsW-Satz**).
- ✓ in den Längen zweier Seiten und in der Größe des der längeren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels übereinstimmen (**SsW-Satz**).



Dreiecke mit einer Symmetrieachse heißen **gleichschenkelig**.

Eigenschaften:

- ✓ Zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel).
- ✓ Die der Basis anliegenden Winkel (Basiswinkel) sind gleich groß.
- ✓ Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze und halbiert die Basis rechtwinklig.

Gleichseitige Dreiecke haben drei gleich lange Seiten.

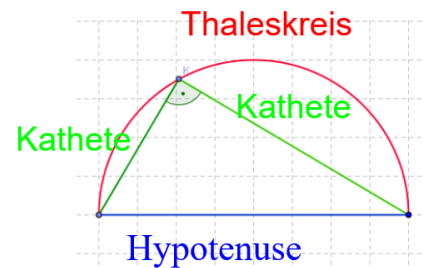
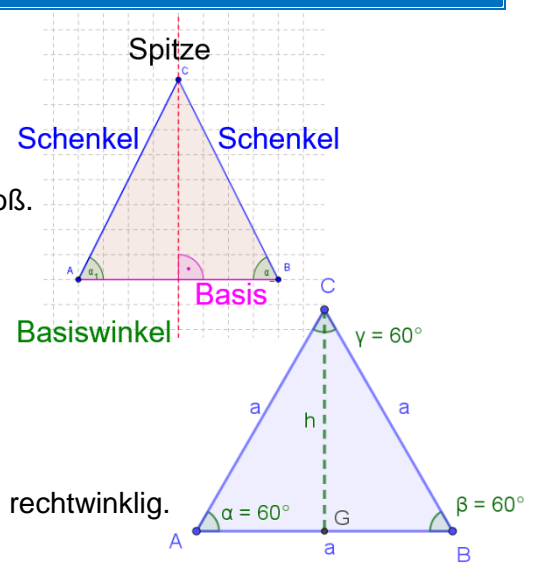
Eigenschaften:

- ✓ Alle Innenwinkel messen 60° .
- ✓ Jedes gleichseitige Dreieck besitzt drei Symmetrieachsen; sie halbieren die Innenwinkel und halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig.

Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, heißen **rechtwinklig**.

Eigenschaften:

- ✓ Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser (**Thaleskreis**).
- ✓ Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite \overline{AB} als Durchmesser liegt, dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig und C der Scheitel des rechten Winkels.



Alle Punkte (der Zeichenebene), die von zwei Punkten A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** (dem **Mittellot**) $m_{\overline{AB}}$ ihrer Verbindungsstrecke.

Die drei Mittelsenkrechten m_a , m_b und m_c eines Dreiecks ABC schneiden einander stets in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des **Umkreises** dieses Dreiecks. Die Punkte A, B und C sind von M gleich weit entfernt.

Eine Gerade, die einen Dreiecksinnenwinkel halbiert, heißt **Winkelhalbierende** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Winkelhalbierende w_α , w_β und w_γ ; sie schneiden einander in einem Punkt W, der von den drei Seiten den gleichen Abstand d besitzt. W ist der Mittelpunkt des **Innkreises**.

Eine Gerade, die durch einen Eckpunkt eines Dreiecks geht und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet, heißt **Höhe** dieses Dreiecks.

Jedes Dreieck besitzt somit drei Höhen h_a , h_b und h_c ; sie schneiden einander in einem Punkt H.

